BTS 2° année
Devoir surveillé n°1 de Mathématiques

Durée de l'épreuve : 2 heures
Calculatrice autorisée, prêt de calculatrice interdit
Documents interdits
Sortie autorisée 1/2 heure avant la fin de l'épreuve

Certaines questions étant à répondre directement sur le sujet, ne pas oublier d'indiquer votre nom et prénom sur chaque page et les rendre avec votre copie

Nom : …………………………….. Prénom : ……………………………………

Exercice 1 (10 points)

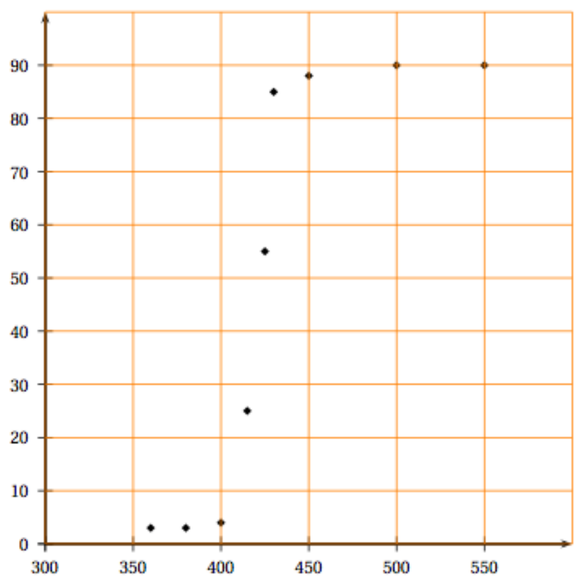
Les verres photochromiques s'assombrissent ou s'éclaircissent en fonction de la luminosité.
On étudie dans cet exercice le coefficient de transmission d'un verre minéral photochromique en fonction de la longueur d'onde de la lumière.
Suite à une étude expérimentale, on a obtenu le nuage de points suivant, où *x* correspond à la longueur d'onde en nm, et *y* au coefficient de transmission, exprimé en pourcentage.

A. Interprétation graphique

A faire directement sur le sujet

1. **Entourer , sur ce sujet**, les points de ce tableau qui correspondent à l'état sombre des verres en les précisant à l'aide d'une légende.

Faire de même pour les points correspondants à l'état clair et les points correspondants à la phase de transition.



B. Ajustement affine

On s'intéresse tout d'abord à la phase de transition entre l'état sombre et l'état clair, correspondant aux données du tableau suivant.

Longueur d'onde x (en nm)	400	410	420	430
Coefficient de transmission y (en %)	4	25	55	85

Nom : …………………………….. Prénom : ……………………………………

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de ce nuage de 4 points. Un ajustement affine est-il envisageable ?

2. Donner une équation de la droite de régression de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$, où a est arrondi à 10^{-2} et b est arrondi à l'unité.

3. Utiliser l'équation précédente pour estimer le coefficient de transmission pour une longueur d'onde de 416 nm. Arrondir à l'unité.

4. D'après cet ajustement, déterminer la longueur d'onde x en nm, à l'unité près , correspondant à un coefficient de transmission de 50% du verre.

C. Étude de fonctions et calcul intégral

Un modèle global de la situation expérimentale conduit à exprimer le coefficient de transmission, exprimé en pourcentage, en fonction de la longueur d'onde x, en nm, à l'aide de la fonction f définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = 90 - \frac{89}{1+e^{0,2(x-416)}}$$

1.a. Démontrer que pour tout x de l'intervalle [0 ; +∞[, on a :

$$f'(x) = 17,8 \times \frac{e^{0,2(x-416)}}{\left(1+e^{0,2(x-416)}\right)^2}.$$

On rappelle que : $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

b) En déduire le sens de variations de la fonction f sur [0 ; +∞[.

2. Les questions suivantes sont des questions à choix multiples.
Pour chaque question, une seule réponse est exacte.
Entourer sur le sujet la réponse qui vous paraît exacte.
On ne demande aucune justification.
La réponse juste rapporte un point. Une réponse fausse enlève 0, 5 point.
Une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Si le total est négatif, la note pour cette partie est ramenée à 0.

a.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 90$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b. La courbe représentative C de la fonction f admet une asymptote dont l'équation est

$x = 90$	$y = 89$	$y = 90$

c. Une équation de la tangente *T* à la courbe *C* au point d'abscisse $x = 416$ est

y = -4,45 – 18923,55	*y = 4,45x – 1805,7*	*y = 45,5x – 18923,55*

d. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe *C* en un point d'abscisse *x* correspond à la vitesse de transition , c'est à dire à la variation de la transmission en pourcentage pour une augmentation de la longueur d'onde de 1 nm.
La vitesse de transition pour 410 nm est donc,à 10^{-2} près, de

3,17%	21,6%	7,23%

e. La courbe représentative C est-elle une bonne approximation du nuage de points de la partie A ?

non	oui	On ne peut pas le déterminer

f. Une valeur approchée à l'unité près de $\int_{380}^{500} f(x).dx$ est

89	7 596	459

Remarque : on pourra utiliser le fait que $F(x) = 90x + 445\ln(1 + e^{-0.2(x-416)})$ est une primitive de *f* sur [0 ; +∞[.

Exercice 2 (4 points)
Au cours d'une année, le service ophtalmologie d'un centre hospitalier a examiné 5 000 patients.
Pour chaque patient, une fiche a été remplie sur laquelle sont indiqués l'âge de la personne et le diagnostic posé.

Le tableau suivant donne une répartition des sujets en classes d'âge.

Classe d'âge (ans)	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ;80[	[80 ;90[
Effectif	300	700	650	900	800	600	450	350

1. On prélève une fiche au hasard dans le fichier.
On note A et B les évènements suivants :
A : « la fiche prélevée est celle d'un sujet dont l'âge est strictement inférieur à 40 ans. »
B : « la fiche prélevée est celle d'un sujet dont l'âge est supérieur ou égal à 20 ans. »
On donnera toutes les réponses aux questions suivantes sous la forme d'une fraction ou sous forme décimale à 10^{-2} près

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements A,B, A∩B et A∪B.

b. Calculer la probabilité que A soit réalisé sachant que B est réalisé.

c. Calculer la probabilité que B soit réalisé sachant que A est réalisé.

Exercice 3 (6 points)

Au cours de la fabrication d'un certain type de lentilles, chacune de ces lentilles doit subir deux traitements notés T1 et T2.

On prélève au hasard une lentille dans la production.
On désigne par A l'évènement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T1 ».
On désigne par B l'évènement : « la lentille présente un défaut pour le traitement T2 ».
On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de A et B.

Une étude a montré que :
– la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T1 est P(A)=0,10;
– la probabilité qu'une lentille présente un défaut pour le traitement T2 est P(B)=0,20;
– la probabilité qu'une lentille ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1.a. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ouT2.

b. Calculer la probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour les deux traitements T1 et T2.

c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2. Calculer la probabilité qu'une lentille,prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

3. Calculer la probabilité qu'une lentille,prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette lentille présente un défaut pour le traitement T1.