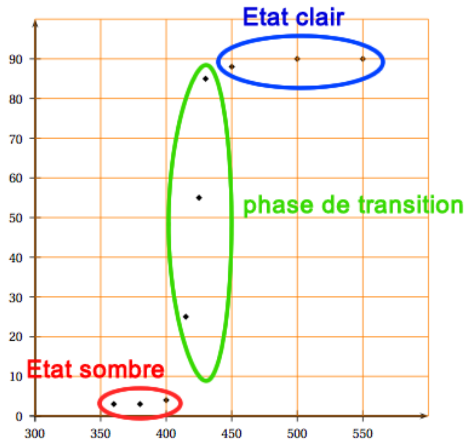
BTS 2° année
Correction du Devoir surveillé n°1 de Mathématiques

Exercice 1 (10 points)

A. Interprétation graphique

On a les différents états suivants **(0,5 pt)**



B. Ajustement affine

1. A la calculatrice, à 10-3 près , on obtient un coefficient de corrélation $r = 0,997$ qui est assez proche de 1 pour envisager un ajustement affine de ce nuage de points. **(0,5 pt)**

2. On obtient à la calculatrice comme équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés pour ce nuage de points : $y = 2,73x - 1091$ **(1 pt)**

3. Pour une longueur d'onde $x = 416$ nm, on a $y = 2,73 \times 416 - 1091 \approx 45$. on peut donc prévoir selon ce modèle un coefficient de transmission d'environ 45% pour cette longueur d'onde de 416 nm. **(0,5 pt)**

4. Pour un coefficient de transmission de 50%, on a $y = 50$.
On a donc :

$$50 = 2,73x - 1091$$

$$2,73x = 50 + 1091$$

$$x = \frac{1141}{2,73} \approx 418$$

On en déduit que d'après ce modèle pour un coefficient de transmission de 50%, on doit avoir une longueur d'onde de 418 nm. **(0,5 pt)**

C. Étude de fonctions et calcul intégral

1.a. On a f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 90 - \frac{89}{1 + e^{0,2(x-416)}}$$

f est une fonction continue, dérivable sur son intervalle de définition.

La dérivée de la fonction $x \mapsto 90$ est $x \mapsto 0$

$x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{0,2(x-416)}}$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^{0,2(x-416)}$, sa dérivée est donc de la forme $x \mapsto -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 0 + 0,2e^{0,2(x-416)} = 0,2e^{0,2(x-416)}$

On en déduit que :

$$f'(x) = 0 - 89 \times \frac{0,2e^{0,2(x-416)}}{\left(1+e^{0,2(x-416)}\right)^2} = 17,8 \times \frac{e^{0,2(x-416)}}{\left(1+e^{0,2(x-416)}\right)^2}.$$

(0,5 pt)

b) On a pour tout *x* de l'intervalle de définition , $e^{0,2(x-416)} > 0$ et $\left(1+e^{0,2(x-416)}\right)^2 > 0$, on en déduit que la fonction dérivée de f est strictement positive sur cet intervalle et que f est donc strictement croissante. **(0,5 pt)**

2.

a.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 90$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. La courbe représentative *C* de la fonction *f* admet une asymptote dont l'équation est

x = 90	*y = 89*	*y = 90*

c. Une équation de la tangente *T* à la courbe *C* au point d'abscisse $x = 416$ est

y = -4,45 – 18923,55	*y = 4,45x – 1805,7*	*y = 45,5x – 18923,55*

d. La vitesse de transition pour 410 nm est donc,à 10^{-2} près, de

3,17%	21,6%	7,23%

e. La courbe représentative C est-elle une bonne approximation du nuage de points de la partie A ?

non	oui	On ne peut pas le déterminer

f. Une valeur approchée à l'unité près de $\int_{380}^{500} f(x)\,dx$ est

89	7 596	459

Remarque : on pourra utiliser le fait que $F(x) = 90x + 445\ln(1+e^{-0,2(x-416)})$ est une primitive de *f* sur [0 ; +∞[.

Exercice 2 (4 points)
Au cours d'une année, le service ophtalmologie d'un centre hospitalier a examiné **4 750** patients.
Pour chaque patient, une fiche a été remplie sur laquelle sont indiqués l'âge de la personne et le diagnostic posé.

Le tableau suivant donne une répartition des sujets en classes d'âge.

Classe d'âge (ans)	[10 ;20[	[20 ;30[	[30 ;40[	[40 ;50[	[50 ;60[	[60 ;70[	[70 ;80[	[80 ;90[
Effectif	300	700	650	900	800	600	450	350

1. On note A et B les évènements suivants :
A : « la fiche prélevée est celle d'un sujet dont l'âge est strictement inférieur à 40 ans. »
B : « la fiche prélevée est celle d'un sujet dont l'âge est supérieur ou égal à 20 ans. »

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements

$$P(A)=\frac{300+700+650}{4750}=\frac{1650}{4750}\approx 0{,}35$$

$$P(B)=\frac{4750-300}{4750}=\frac{4450}{4750}\approx 0{,}94$$

$$P(A\cap B)=\frac{700+650}{4750}=\frac{1350}{4750}\approx 0{,}28$$

$$P(A\cup B)=\frac{4750}{4750}=1$$

(4×0,5 = 2 pts)

b. $P_B(A)=\frac{700+650}{4450}=\frac{1350}{4450}\approx 0{,}3$ **(1 pt)**

c. $P_A(B)=\frac{700+650}{1650}=\frac{1350}{1650}\approx 0{,}82$ **(1 pt)**

Exercice 3 (6 points)
Correction sans arbre de probabilité en employant uniquement les formules du cours.

1.a. La probabilité qu'une lentille, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ouT2 correspond à la probabilité de l'événement contraire de « la lentille ne présente aucun des 2 défauts », on a donc :
$P(A\cup B)=1-0{,}75=0{,}25$. **(1 pt)**

b. On a

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$P(A\cap B)=0{,}1+0{,}2-0{,}25=0{,}05$$

La probabilité pour une lentille de présenter les 2 défauts est donc de 0,05.
(1 pt)

c. On a

$P(A \cap B) = 0{,}05$

$P(A) \times P(B) = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$

$donc \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

Les événements A et B ne sont pas indépendants. **(1 pt)**

2. On sait que la probabilité pour une lentille de n'avoir aucun des 2 défauts est de 0,75 et que la probabilité qu'elle présente les 2 défauts est de 0,05.
La probabilité pour une lentille de ne présenter qu'un seul des 2 défauts est donc de
1 - 0,75 - 0,05 = 1 - 0,08 = 0,2 **(1,5 pt)**

3. On a

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$0{,}05 = 0{,}1 \times P_A(B)$

$P_A(B) = \dfrac{0{,}05}{0{,}1} = 0{,}5$

La probabilité pour une lentille de présenter le défaut pour le traitement T2 sachant qu'elle présente un défaut pour le traitement T1 est donc de 0,5. **(1,5 pt)**