

# Leçon n° 1 : Ecriture des entiers dans une base donnée.

## 1. Ecriture des entiers en base 10.

Considérons le nombre entier suivant  $X = 1\ 234\ 506$ .

Il s'agit d'un nombre entier écrit en base 10 ( On parle aussi d'écriture décimale ).

On a :

$$1\ 234\ 506 = 1\ 000\ 000 + 200\ 000 + 30\ 000 + 4\ 000 + 500 + 6$$

$$1\ 234\ 506 = 1 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

Pour écrire un nombre en base 10, on a besoin des dix chiffres 0,1,2,3,...8,9.

### Théorème

Pour nombre entier  $n$ , il existe une unique suite de nombres  $\{a_0; a_1; a_2; \dots; a_k\}$  telle que :

$$n = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \dots + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

avec  $a_i \in \{0; 1; 2; \dots; 8; 9\}$  pour tout  $i \in \{0; 1; 2; \dots; k\}$  et  $a_k \neq 0$

$a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$  représente alors l'écriture du nombre  $n$  en base 10.

On peut alors écrire si la base 10 est la base utilisée par défaut :

$$n = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0$$

ou pour préciser qu'il s'agit de l'écriture de  $n$  en base 10 :

$$n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{10}$$

$$X = 1\ 234\ 506 = \overline{1234506}^{10}$$

## 2. Ecriture des entiers dans d'autres bases.

### A. Exemple d'écriture d'un nombre en base 5

On considère  $N = 34 = \overline{34}^{10}$  On souhaite l'écrire en base 5 :

#### Méthode 1 : par décomposition en puissances décroissantes

On détermine les différentes puissances de la base dont on aura besoin :  $5^0 = 1$

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 25$$

$$5^3 = 125$$

$5^3 = 125$  ne sera pas nécessaire puisque  $N < 125$

On décompose N suivant les puissances décroissantes de 5 nécessaires :

$$34 = 1 \times 25 + 9$$

$$34 = 1 \times 25 + 1 \times 5 + 4 \times 1$$

$$34 = 1 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$

$$\overline{34}^{10} = \overline{114}^5$$

## Exercices

### Exercice 1

1. Donner l'écriture en base 5 du nombre  $N = 100 = \overline{100}^{10}$
2. Donner l'écriture en base 5 du nombre  $N = 200 = \overline{200}^{10}$
3. On considère le nombre  $N = \overline{3201}^5$ . Donner son écriture en base 10.
4. Donner l'écriture en base 10 du plus grand nombre que l'on peut écrire avec 4 chiffres en base 5.

### Exercice 2

Donner l'écriture en base 3 du nombre  $N = \overline{1021}^5$

### Exercice 3

Cocher l'unique bonne réponse parmi les 4 propositions.

1. Soit  $N=10$  écrit en base 10. Son écriture en base 5 est :
  - $\overline{2}^5$
  - $\overline{20}^5$
  - $\overline{21}^5$
  - $\overline{10}^5$
2. Soit  $N=\overline{2}^3$  écrit en base 3. Son écriture en base 10 est :
  - 2
  - 6
  - 9
  - 8
3. Soit  $N=\overline{322}^5$  écrit en base 5. Son écriture en base 10 est :
  - 322
  - 30
  - 32
  - 87
4. Le plus grand nombre écrit avec 4 chiffres en base 3 est :
  - $\overline{3000}^3$

$\overline{2222}^3$

$\overline{2000}^3$

$\overline{9999}^3$

5. Soit N le plus grand nombre écrit avec 2 chiffres en base 5. L'écriture de N en base 10 est :

9

24

6

99

## B. La méthode 1 en Python : qu'est-ce que ça donne ?

La méthode 1 est un algorithme, c'est à dire une suite d'opérations à effectuer pour obtenir le résultat voulu.

Elle se décompose elle-même en deux algorithmes :

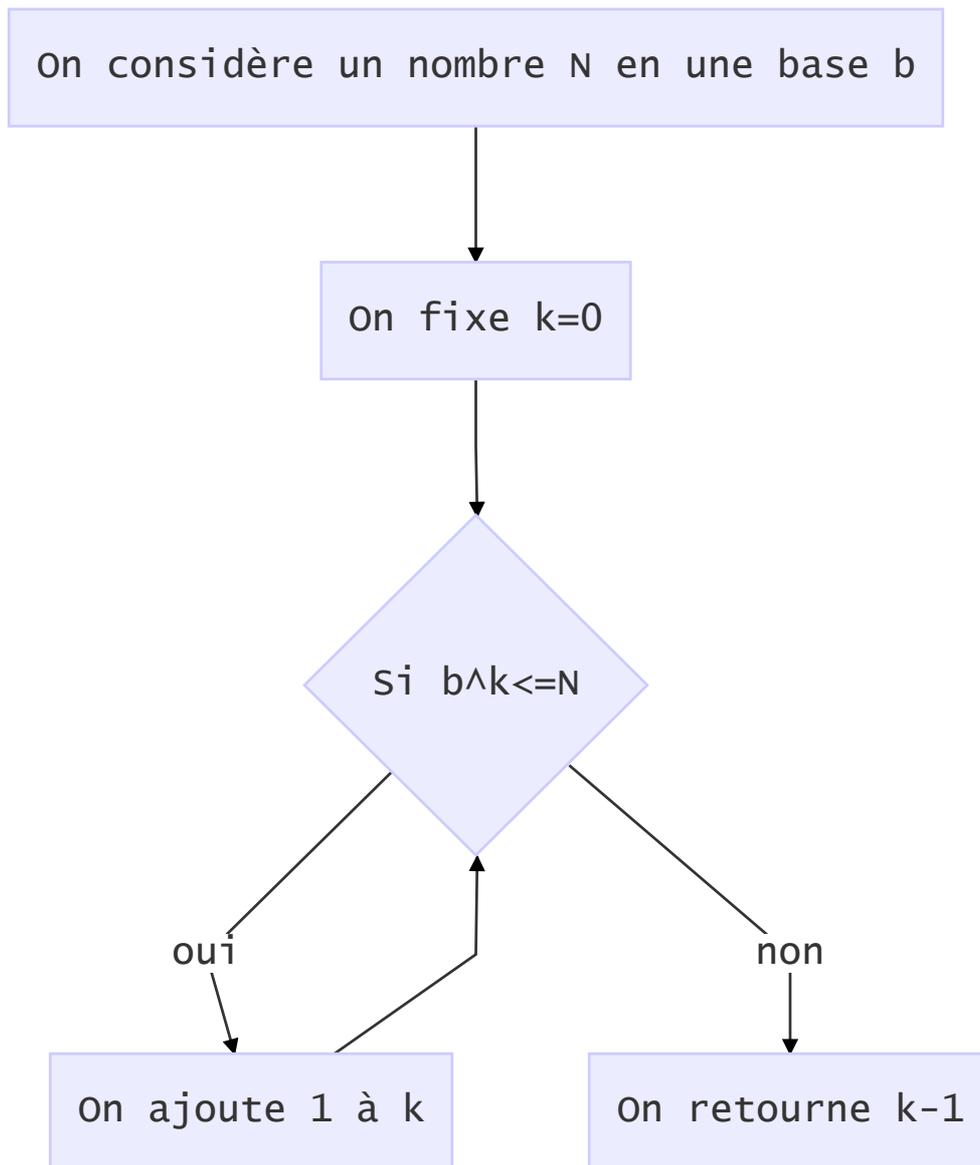
- algorithme 1 : on cherche en premier lieu la plus grande puissance de la base inférieure ou égale au nombre que l'on veut convertir,
- algorithme 2 : on détermine ensuite la décomposition du nombre selon les puissances décroissantes de la base à partir de la puissance déterminée par l'algorithme 1.

### a) Etude de l'algorithme 1 et traduction en Python.

Considérons le nombre  $N=125$  que l'on veut écrire en base 5.

On cherche le plus grand entier  $k$  tel que  $5^k \leq N$ . On a :  $5^0 = 1$ ,  $5^1 = 5$ ,  $5^2 = 25$ ,  $5^3 = 125$ ,  $5^4 = 625$  donc  $k = 3$ .

Ce qui se traduit par l'algorithme :



On peut traduire cet algorithme par la fonction suivante en Python :

```

# fonction qui détermine la plus grande puissance
# d'une base donnée strictement inférieure ou égale au nombre
def plus_grande_puissance(nombre, base):
    puissance=0 # on définit la puissance à 0
    while base**puissance <= nombre : # Si on n'a pas la bonne puissance
        puissance+=1 # on ajoute 1 à la puissance
    return puissance-1 # on retourne le résultat désiré
  
```

**b) Etude de l'algorithme 2 et traduction en Python.**

Considérons à présent le nombre  $N=202$  que l'on veut écrire en base 5.

On cherche le plus grand entier  $k$  tel que  $5^k \leq N$ . L'algorithme 1 nous fournit comme réponse

$$k = 3. \text{ On a alors : } 202 = 1 \times 5^3 + 77$$

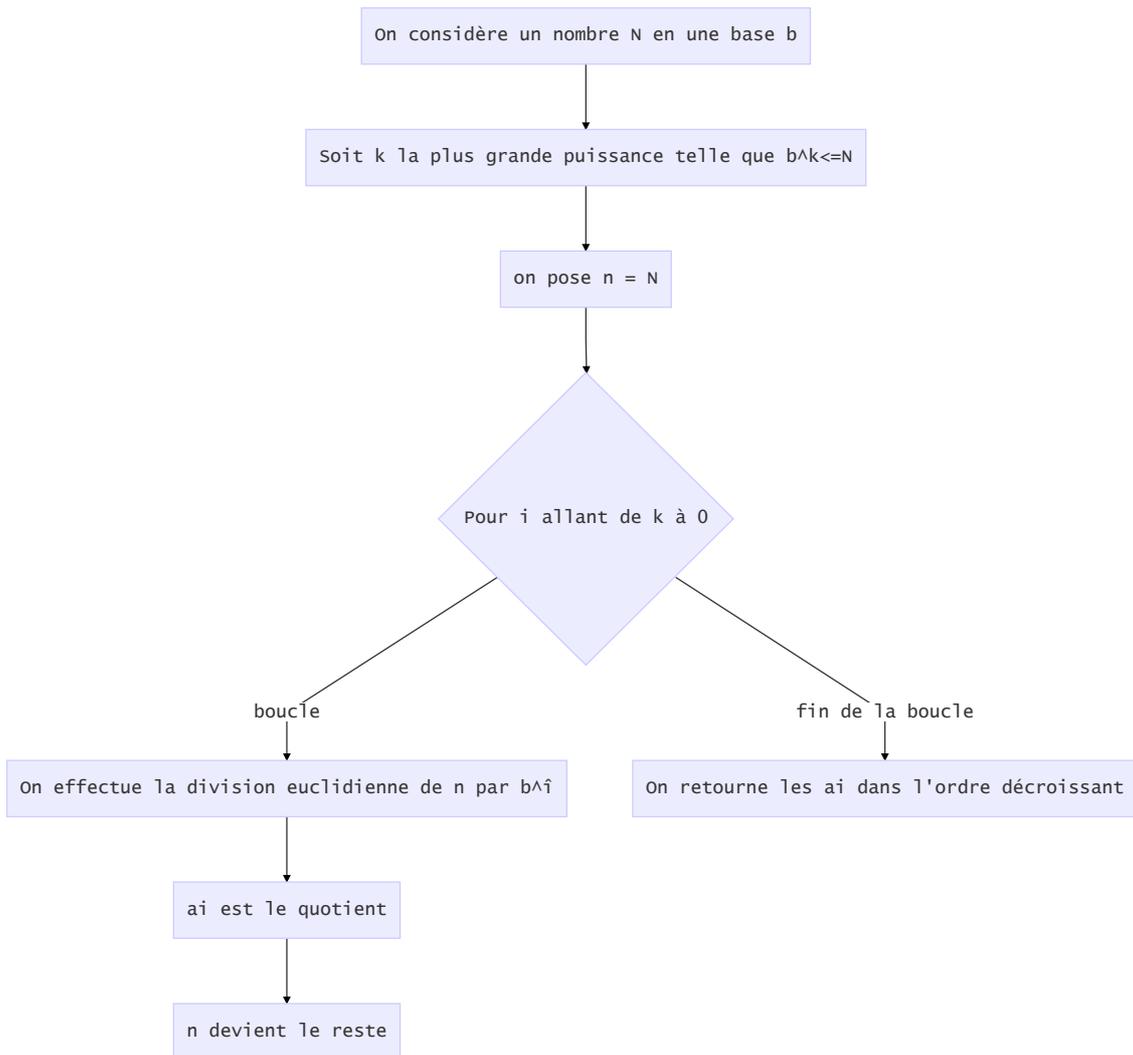
$$77 = 3 \times 5^2 + 2$$

$$2 = 0 \times 5^1 + 2$$

$$2 = 2 \times 5^0 + 0$$

L'écriture de 202 en base est donc :  $\overline{1302}^5$

On a utilisé l'algorithme suivant :



On peut définir ainsi la fonction suivante en Python :

```
# donne l'écriture du nombre
# selon la base demandée
def conversion(nombre,base):
    n=nombre
    ecriture=""
    puissance_max=plus_grande_puissance(nombre,base)
    for i in range(puissance_max,-1,-1) :
        chiffre=n//(base**i)
        ecriture=ecriture+str(chiffre) # la commande str() transforme un int
en un str
        n=n%(base**i)
    return ecriture
```

Remarque : cette fonction fait appel à la fonction précédemment définie pour l'algorithme 1.