Leçon n° 1 : Ecriture des entiers dans une base donnée.

1. Ecriture des entiers en base 10.

Considérons le nombre entier suivant X = 1 234 506.
Il s'agit d'un nombre entier écrit en base 10 (On parle aussi d'écriture décimale).
On a :
1 234 506 = 1 000 000 + 200 000 + 30 000 + 4 000 + 500 + 6
1 234 506 = $1 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
Pour écrire un nombre en base 10, on a besoin des dix chiffres 0,1,2,3,...8,9.

> **Théorème**
>
> > Pour tout nombre entier n ,il existe une unique suite de nombres $\{a_0;a_1;a_2...;a_k\}$ telle que :
> > $n = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + ... + a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$
> > avec $a_i \in \{0;1;2;...;8;9\}$ pour tout $i \in \{0;1;2....;k\}$ et $a_k \neq 0$
> > $a_k a_{k-1} a_{k-2} .... a_1 a_0$ représente alors l'écriture du nombre n en base 10.
> > On peut alors écrire si la base 10 est la base utilisée par défaut :
> > $n = a_k a_{k-1} a_{k-2} .... a_1 a_0$
> > ou pour préciser qu'il s'agit de l'écriture de n en base 10 :
> > n= $\overline{a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0}^{10}$
> > X = 1 234 506 = $\overline{1234506}^{10}$

2. Ecriture des entiers dans d'autres bases.

A. Exemple d'écriture d'un nombre en base 5

On considère N = 34 = $\overline{34}^{10}$ On souhaite l'écrire en base 5 :

> **Méthode 1 : par décomposition en puissances décroissantes**
>
> > On détermine les différentes puissances de la base dont on aura besoin : $5^0 = 1$
> >
> > $5^1 = 5$
> >
> > $5^2 = 25$

> $5^3 = 125$
> $5^3 = 125$ ne sera pas nécessaire puisque $N < 125$
> On décompose N suivant les puissances décroissantes de 5 nécessaires :
> 34 = $1 \times 25 + 9$
> 34 = $1 \times 25 + 1 \times 5 + 4 \times 1$
> 34 = $1 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0$
> $\overline{34}^{10} = \overline{114}^{5}$

Exercices

Exercice 1

1. Donner l'écriture en base 5 du nombre N = 100 = $\overline{100}^{10}$
2. Donner l'écriture en base 5 du nombre N = 200 = $\overline{200}^{10}$
3. On considère le nombre N = $\overline{3201}^{5}$.Donner son écriture en base 10.
4. Donner l'écriture en base 10 du plus grand nombre que l'on peut écrire avec 4 chiffres en base 5.

Exercice 2

Donner l'écriture en base 3 du nombre N = $\overline{1021}^{5}$

Exercice 3

Cocher l'unique bonne réponse parmi les 4 propositions.

1. Soit N=10 écrit en base 10. Son écriture en base 5 est :
   - [ ] $\overline{2}^{5}$
   - [ ] $\overline{20}^{5}$
   - [ ] $\overline{21}^{5}$
   - [ ] $\overline{10}^{5}$
2. Soit N=$\overline{2}^{3}$ écrit en base 3. Son écriture en base 10 est :
   - [ ] 2
   - [ ] 6
   - [ ] 9
   - [ ] 8
3. Soit N=$\overline{322}^{5}$ écrit en base 5. Son écriture en base 10 est :
   - [ ] 322
   - [ ] 30
   - [ ] 32
   - [ ] 87
4. Le plus grand nombre écrit avec 4 chiffres en base 3 est :
   - [ ] $\overline{3000}^{3}$

- ❑ $\overline{2222}^3$
- ❑ $\overline{2000}^3$
- ❑ $\overline{9999}^3$

5. Soit N le plus grand nombre écrit avec 2 chiffres en base 5. L'écriture de N en base 10 est :
   - ❑ 9
   - ❑ 24
   - ❑ 6
   - ❑ 99

B. La méthode 1 en Python : qu’est-ce que çà donne ?

La méthode 1 est un algorithme, c'est à dire une suite d'opérations à effectuer pour obtenir le résultat voulu.

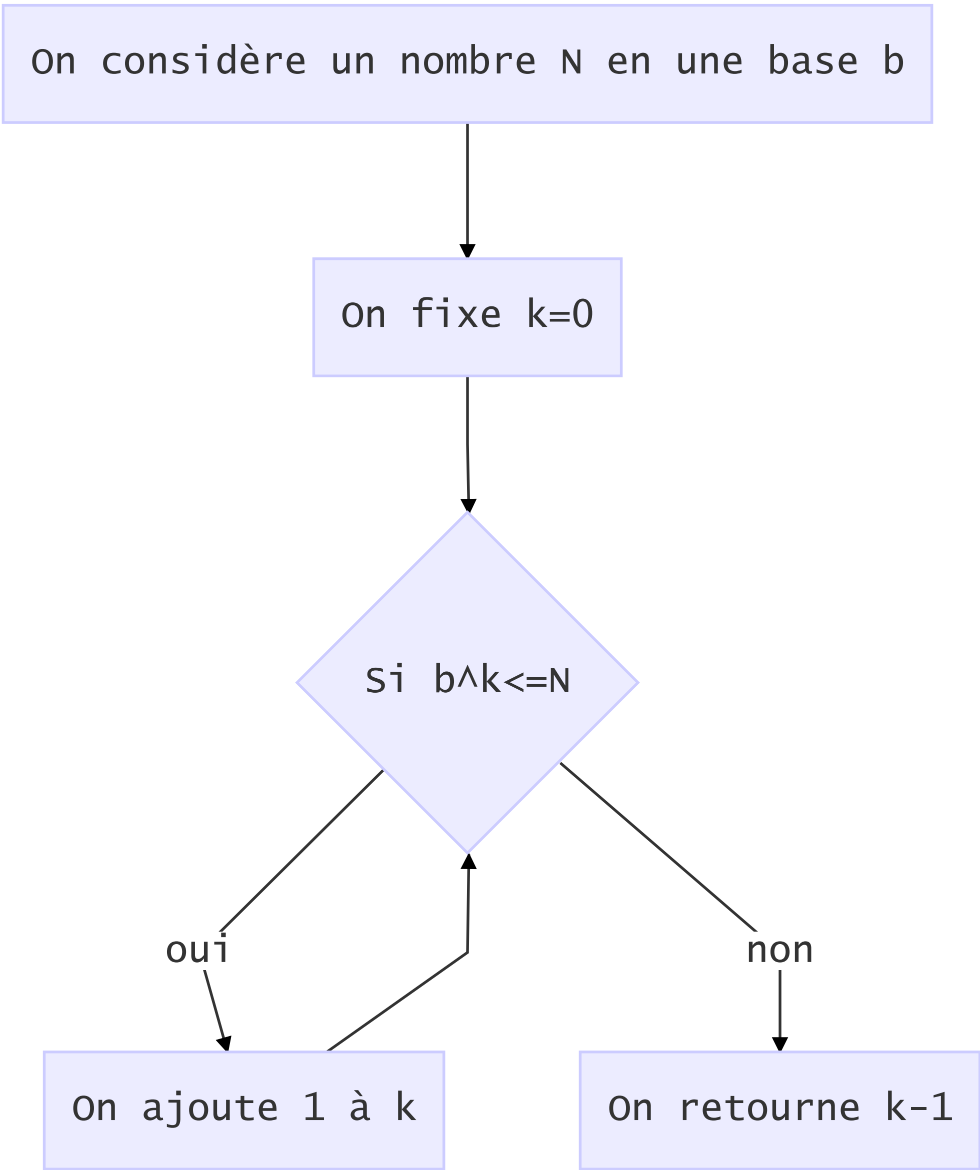
Elle se décompose elle-même en deux algorithmes :

- algorithme 1 : on cherche en premier lieu la plus grande puissance de la base inférieure ou égale au nombre que l’on veut convertir,
- algorithme 2 : on détermine ensuite la décomposition du nombre selon les puissances décroissantes de la base à partir de la puissance déterminée par l’algorithme 1.

a) Etude de l’algorithme 1 et traduction en Python.

Considérons le nombre N=125 que l’on veut écrire en base 5.
On cherche le plus grand entier k tel que $5^k \leq N$. On a : $5^0 = 1$, $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$, $5^4 = 625$ donc $k = 3$.

Ce qui se traduit par l’algorithme :



On peut traduire cet algorithme par la fonction suivante en Python :

```python
# fonction qui détermine la plus grande puissance
# d'une base donnée strictement inférieure ou égale au nombre
def plus_grande_puissance(nombre,base):
    puissance=0 # on définit la puissance à 0
    while base**puissance <= nombre : # Si on n'a pas la bonne puissance
        puissance+=1 # on ajoute 1 à la puissance
    return puissance-1 # on retourne le résultat désiré
```

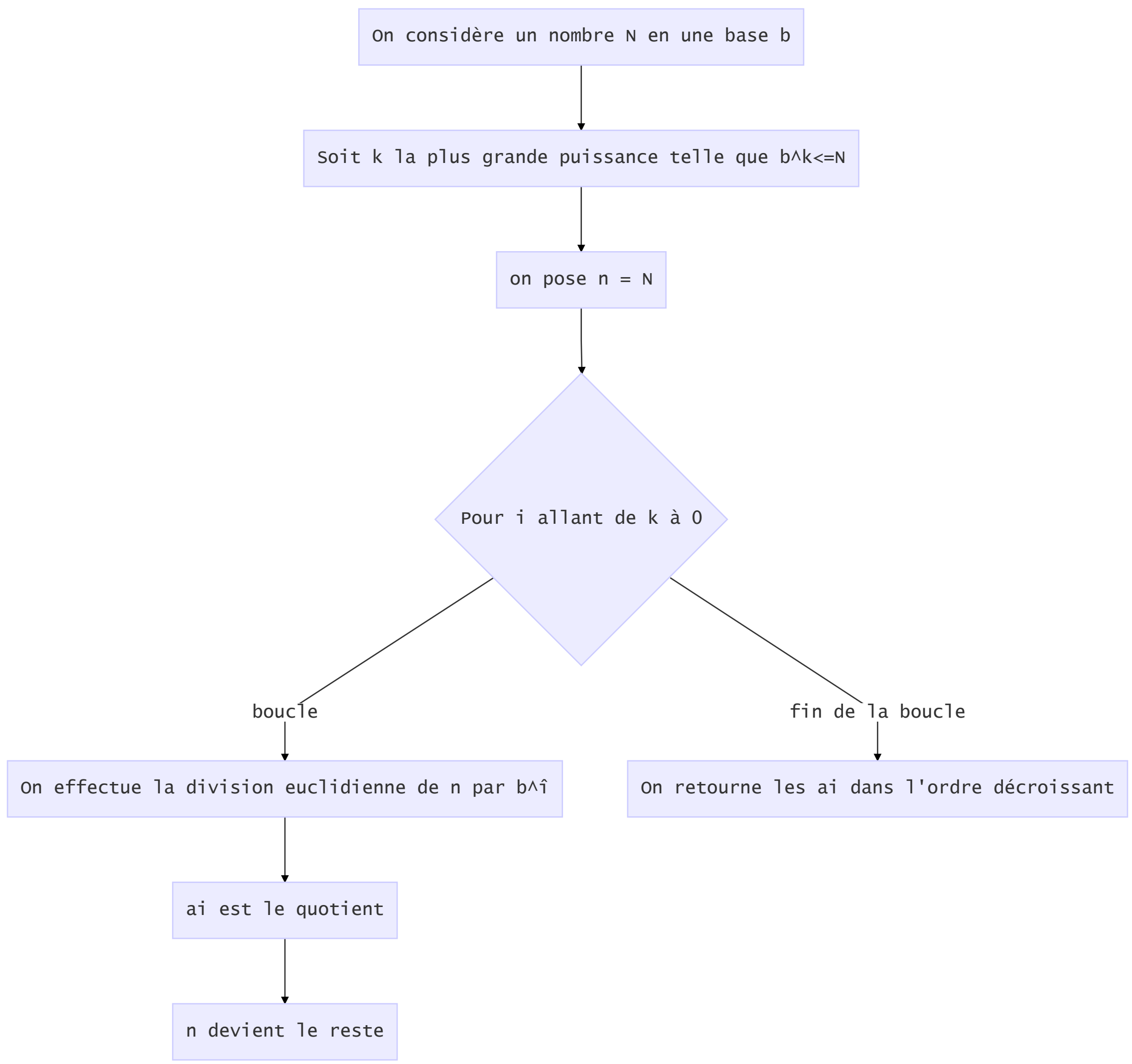
b) Etude de l’algorithme 2 et traduction en Python.

Considérons à présent le nombre N=202 que l'on veut écrire en base 5.
On cherche le plus grand entier k tel que $5^k \leq N$. L'algorithme 1 nous fournit comme réponse $k = 3$. On a alors : $202 = 1 \times 5^3 + 77$
$77 = 3 \times 5^2 + 2$
$2 = 0 \times 5^1 + 2$

$2 = 2 \times 5^0 + 0$

L'écriture de 202 en base est donc : $\overline{1302}^5$

On a utilisé l'algorithme suivant :



On peut définir ainsi la fonction suivante en Pyhton :

```
# donne l'écriture du nombre
# selon la base demandée
def conversion(nombre,base):
    n=nombre
    ecriture=""
    puissance_max=plus_grande_puissance(nombre,base)
    for i in range(puissance_max,-1,-1) :
        chiffre=n//(base**i)
        ecriture=ecriture+str(chiffre) # la commande str() transforme un int en un str
        n=n%(base**i)
    return ecriture
```

Remarque : cette fonction fait appel à la fonction précédemment définie pour l’algorithme 1.